

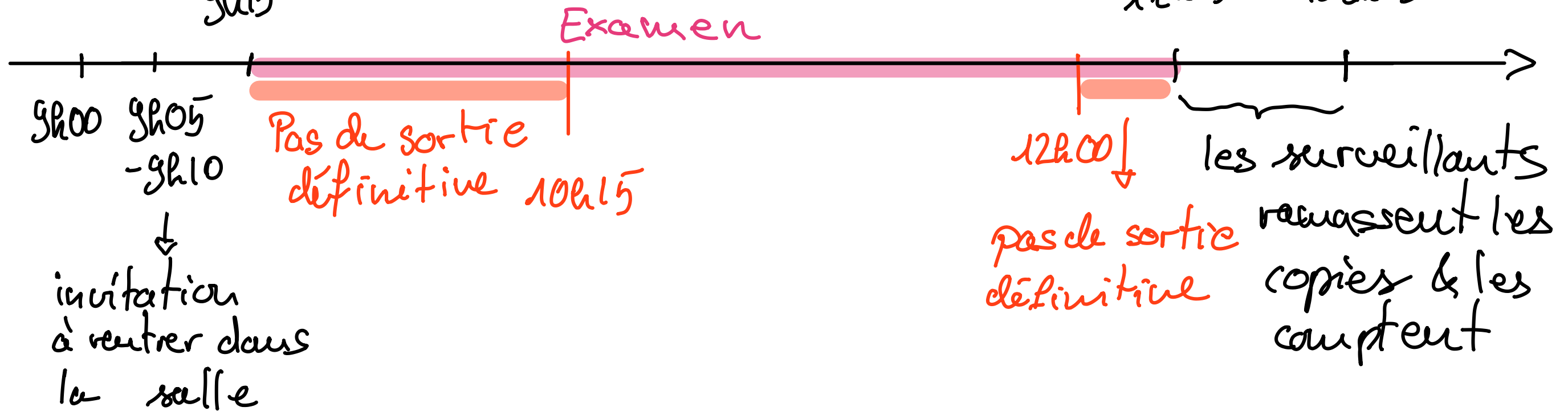
RaQ: 9 janvier dès 14h (Infos examen)

Comment bien remplir un examen QCM ? → stylo noir
→ tripp-ex
style déverlure

Formulaire: 1 feuille A4 recto/verso
(table des trafo est dans l'examen)

Rough time line
début de l'examen
9h15

fin de l'examen
12h15
libération
↑
~12h25



Contenu :

↳ Séparé en 3 parties :

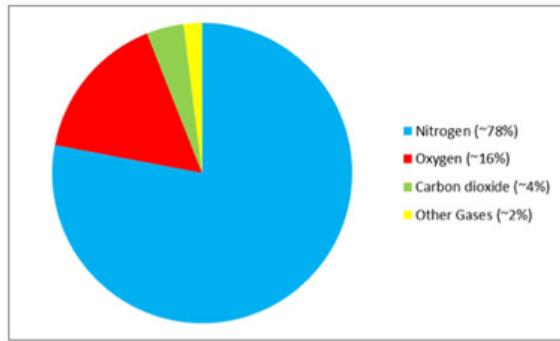
1 - QCM sur l'analyse vectorielle (1 points négatifs)

2 - QCM sur l'analyse de Fourier (1 points négatifs)

3 - Questions ouvertes

Chaque
question
vaut
entre 2
& 6 points

Pas de démonstrations, que des exercices types.



Proposition 4.20

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique $C^0(\mathbb{R})$, $C_{\text{morc}}'([0, T])$ $\hookrightarrow$ $f' \in C_{\text{morc}}'$.

$$\text{Si } \bar{F}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right\}$$

$$\text{Alors, } \bar{F}f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}n \left\{ b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) - a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right\}$$

Propositions 5.7 (i) & 5.12

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{F}[f'](\alpha) = i\alpha \hat{f}(\alpha)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

§6.2 Applications des séries de Fourier

Exemple 6.1

(i) Vérifier § ⑤ avec semaine

(ii) Soit $\alpha \neq \pm 1$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π -périodique.

Trouver $u: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} u(t) + \alpha \cdot u(t - \pi) = f(t) & t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

On cherche une solution sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ A_n \cos(n \cdot t) + B_n \sin(n \cdot t) \}$$

$$u(t - \pi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \underbrace{\cos(n(t - \pi))}_{\cos(nt - n\pi)} + B_n \underbrace{\sin(n(t - \pi))}_{\sin(nt - n\pi)} \right\}$$

$$= (-1)^n \cos(nt) \quad \sin(nt - n\pi) = (-1)^n \sin(nt)$$

$$\Rightarrow u(t) + \alpha u(t - \pi) = (1 + \alpha) \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ (A_n + \alpha (-1)^n A_n) \cos(nt) + (B_n + \alpha (-1)^n B_n) \sin(nt) \right\}$$

$$\text{Si } f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \}$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha) \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \quad (n=0)$$

$$\begin{cases} A_n (1 + \alpha (-1)^n) = a_n \\ B_n (1 + \alpha (-1)^n) = b_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{1+\alpha}$$

$$A_n = \frac{a_n}{1+(-1)^n \alpha}, \quad B_n = \frac{b_n}{1+(-1)^n \alpha}$$

Si par exemple $f(t) = \cos t + 3 \sin(2t) + 4 \cos(5t)$

$$(a_0 = 0, a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 3, a_3 = b_3 = a_4 = b_4 = 0, a_5 = 4, b_5 = 0)$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{\cos(t)}{1-\alpha} + \frac{3}{1+\alpha} \sin(2t) + \frac{4}{1-\alpha} \cos(5t).$$

Si par contre $\alpha = 1$, le système devient

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_n (1+(-1)^n) = a_n$$

$$B_n (1+(-1)^n) = b_n$$

i.e. si n pair

$$2A_n = a_n$$

$$2B_n = b_n$$

si n impair

$$0 = a_n$$

$$0 = b_n$$

2 choses se produisant:

1) On obtient une condition nécessaire sur $f: f \in \mathcal{N}^*$
impair, $a_n = b_n = 0$. (sans quoi aucun espoir
de trouver une solution
avec cette méthode)

2) On récupère une infinité de solution:

$\forall n \in \mathcal{N}^*$ impair, A_n & B_n sont des paramètres
libres.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_{2n-1} \cos((2n-1)x) + B_{2n-1} \sin((2n-1)x) \right\}$$

vérifie $v(x) + v(x-a) = 0$.

§6.3: Applications de la transformée de Fourier

Exemples 6.2

(i) trouver $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$u''(x) + 2u(x) = \underbrace{x^2 e^{-x^2}}_{=f(x)}.$$

Tables ligne 9:
 $x e^{-a^2 x^2}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \mathcal{F}[x^2 e^{-x^2}] \\ &= \mathcal{F}[x \cdot (x e^{-x^2})] \\ &\stackrel{\text{§.7 prop (ii)}}{=} i \frac{d}{d\alpha} [\mathcal{F}[x e^{-x^2}](\alpha)] \end{aligned}$$

$$= i \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \right]$$

$$= i \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} - \frac{i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)$$

$$\mathcal{F}[u'' + 2u](\alpha) = \mathcal{F}[u''] + 2\hat{u}$$

$$5.7^{(i)} = (i\alpha)^2 \hat{u} + 2\hat{u} = (2 - \alpha^2) \hat{u}$$

$$u'' + 2u = f \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad (2 - \alpha^2) \hat{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \underbrace{\frac{1}{2} (2 - \alpha^2)}_{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

table ligne 8

$$f(x) = e^{-\omega^2 x^2}, \quad \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2} |\omega|} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$$

$$= \frac{1}{4} \mathcal{F}[e^{-x^2}]$$

$$\Rightarrow u(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \frac{1}{4} e^{-x^2}$$

On vérifie $u'(x) = -\frac{x}{2} e^{-x^2}$, $u''(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}$

$$\Rightarrow u''(x) + 2u(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2}$$

(ii) Trouver $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une solution de

$$g u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} f u(t) e^{-|x-t|} dt = e^{-|x|}$$

Soit $f(x) = e^{-|x|}$

L'équation s'écrit alors,

$$g_u + \underbrace{g_u * f}_{} = f$$

$\mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_u(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(t) f(x-t) dt \right)$

$$\mathcal{F}[g_u + g_u * f](\alpha) = \hat{f}(\alpha)$$

$$g_u(\alpha) + g \mathcal{F}[u * f](\alpha) = \hat{f}(\alpha)$$

$$g_u(\alpha) + g \cdot \sqrt{2\pi} \hat{u}(\alpha) \hat{f}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$$

$$\hat{u}(g + 8\sqrt{2a} \hat{f}(x)) = \hat{f}(x)$$

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hat{u}(g + 8\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hat{u} \frac{25 + 9x^2}{1+x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{25 + 9x^2}$$

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(\frac{5}{3})^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{9} \mathcal{F} \left[\frac{e^{-\frac{5}{3}|x|}}{\frac{5}{3}} \right]$$

$$\omega = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow u(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \frac{1}{15} e^{-\frac{5}{3}|x|}$$

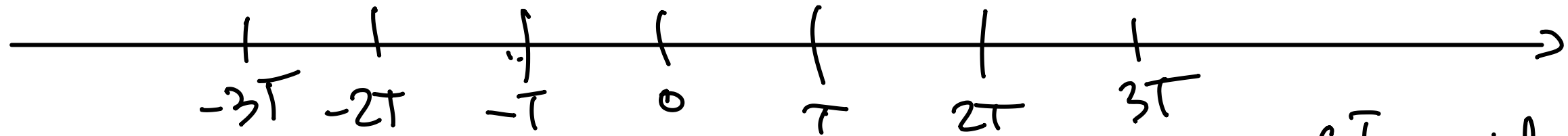
§ 6.4 : Sur l'incompatibilité entre § 6.2 & 6.3

Il n'existe pas de problème où ces 2 méthodes s'appliquent :

Pour § 6.2 : On a besoin u, T -périodique, $u \in C_{\text{moy}}$

Pour § 6.3 : On a besoin $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx < +\infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} |u(x)| dx$$



$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T |u(x)| dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \int_0^T |u(x)| dx = 0 \\ +\infty & \text{si } \int_0^T |u(x)| dx > 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^T |u(x)| dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \forall x \in [0, T], |u(x)| = 0 \\ |u(x)| \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, T], \quad u(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \Omega, \quad u(x) = 0.$$